- احسب قيم الإنتاج المتوقعة باستخدام معادلة منحنى التوزيع الطبيعي.
- ما هو التوزيع المناسب لبيانات الإنتاج؟

2. لدينا البيانات التالية التي تبين تطور عدد الطلاب في الجامعة:

السنة	1998	1999	2000	2001
عدد الطلاب	60000	70000	40000	20000
عدد المدرسين	200	170	220	190

والمطلوب:

- مثل البيانات السابقة في الجدول أعلاه بالطريقة البيانية المناسبة.
- ما هو التوزيع المناسب للبيانات الواردة في الجدول السابق ؟
- احسب أعداد الطلاب المتوقعة باستخدام معادلة منحنى التوزيع الطبيعي، ثم باستخدام معادلة منحنى التوزيع الثنائي وقارن النتيجة.

ج- بعض توزيعات الاحتمال الخاصة

سنقدّم في هذا القسم توزيعين من أكثر توزيعات الاحتمال فائدة لحلّ مسائل الاستدلال الإحصائي ، هذان التوزيعان ، أحدهما توزيع لمتغير متقطّع ، والآخر توزيع لمتغيّر متّصل ، هما . بلا شكّ . أكثر ما جرى استخدامه من توزيعات في مزاولة الإحصاء .

17-7- التوزيع ذو الحدين Binomial Distribution :

اعتبر تجربة يمكن فيها تبويب كل النتائج الممكنة كنتائج ينتج عنها حدوث حدث ، فإذا نتج عنه حدوث A اعتبرناه نجاحاً وإلاّ ، فهو فشل . واستخدام كلمة "نجاح" هنا ما هو إلاّ طريقة مناسبة لوصف وقوع حدث ما ، ولا يعني بالضرورة أن وقوع الحدث مرغوب فيه . نتوقع أن التجربة تكررت عدداً من المرات نرمز له بالحرف n ، ولندخل متغيّراً عشوائياً x يمثّل العدد الكلي لمرات النجاح التي حصلنا عليها ، أي عدد مرات وقوع A عند تكرار التجربة n من المرات . يسمى المتغيّر العشوائي الذي من هذا النوع متغيراً ذي حدين .

دعنا نعدل تلك التجربة بحيث تصبح عبارة عن إلقاء قطعة النقود مرة واحدة بدلاً من ثلاث مرات . لنعرف النجاح بأنه الحصول على رأس ، ولتكرار التجربة ، ثلاث مرات : إذن فلدينا هنا n= 3 . عندئذٍ يمثّل المتغيّر العشوائي x عدد الرؤوس التي نحصل عليها في ثلاث رميات كما كانت الحال في بند 2 ، الفقرة (ب). وإذن فسيعطي الشكل (7-19) الفقرة (ب)، توزيع المتغيّر العشوائي ذي الحدين . هذا ، وقد أعدنا تصويره في الشكل (7-21) .

أما تجربة دحرجة زهرتي طاولة مع تعريف x كمجموع النقاط على الزهرتين فلا تعطينا متغيّراً من متغيّرات ذي الحدين ، إذ لا يمكن للمرء اعتبار كل دحرجة زهرة كناتج يعطينا نجاحاً أو فشلاً مع جعل x تمثّل مجموع عدد مرات النجاح . فهناك ست إمكانيات لكل من الزهرتين لا إمكانيتان فقط ، كما

تتطلّب مسألة ذي الحدين .

وتجربة سحب كرة من صندوق يحتوي على ثلاث كرات حمراء ، وكرتين سوداوتين وكرة خضراء ، ليست هي الأخرى تجربة من التجارب التي تؤدي إلى متغيّر من متغيّرات ذي الحدين في الصورة الحالية له ، إذ لدينا هنا ثلاث نتائج ممكنة بدلاً من نتيجتين . ومع هذا ، فإذا كان اهتمامنا محصوراً فقط في معرفة ما إذا كنا سنحصل على كرة حمراء ، فستصبح المسألة مسألة توزيع ذي الحدين . وسيمثّل المتغيّر x عدد الكرات الحمراء التي نحصل عليها عند إجراء التجربة n من المرات . هذا ، وفي مسائل متغيرات ذي الحدين ، يفهم دائماً أنه ، إذا كانت التجربة تتضمن سحب أشياء من أوعية ، فإن إرجاع الأشياء المسحوبة يتم قبل البدء في إجراء التجربة الآتية ، إذ إن تكرار التجربة يجب أن يكون تكراراً للتجربة الأصلية من كافة جوانبها .

الشكل (7–21): توزيع متغيّر عشوائي في تجربة رمي قطعة نقود

ولننظر الآن في مثال أعقد نوعاً لمتغيّر من متغيّرات ذي الحدين ، لنر كيف نحصل على توزيعه . لتكن التجربة الأساسية هي دحرجة زهرة طاولة مرة أخرى ، وليكن تعريف النجاح هو الحصول على آس (أي نقطة واحدة) . سنجري التجربة ثلاث مرات ، أي أن $n = 3$.

نحصل على توزيع المتغيّر العشوائي هذا ، يمكننا اتّباع الطريقة نفسها التي اتّبعناها في تجربة رمي قطعة النقود الممثلة في الشكل (7-21) . هذه الطريقة تتكوّن من النظر إلى مجال العيّنة الأصلي للتجربة الكاملة ثم اختزاله إلى مجال عيّنة جديدة للمتغيّر العشوائي x ، وذلك بتطبيق تعريف احتمال الأحداث على مجال العيّنة الأصلي . والآن ، عند كل دحرجة لزهرة طاولة ، ما علينا إلاّ أن نسجّل إذا كان ما حدث هو نجاح أو فشل ، حيث كلمة نجاح تعني الحصول على آس . فإذا استخدمنا الحرفين S , F ليمثّلا النجاح والفشل فسيكون لدينا ثمان نقط في مجال العيّنة ، كما كانت الحال عند رمي قطعة النقود ثلاث رميات ، وكان لابدّ من ظهور H أو T عند كل رمية . ولقد مثلنا هذه النقاط في جدول (5-7) باستخدام الحرفين S , F ليبيّنا النتائج المختلفة الممكنة . كما بيّنّا أيضاً في جدول (5-7) القيم المناظرة للمتغيّر العشوائي x .

جدول (5-7)

النتائج	SSS	SSF	SFS	FSS	SFF	FSF	FFS	FFF
قيم x	3	2	2	2	1	1	1	0

سنلاحظ أن هذا الجدول هو بالضبط نفس جدول مسألة رمي قطعة النقود ثلاث مرات نفسه والذي سبق أن بيّنّاه في الشكل (7-15) ، الفقرة (ب) . بيد أن حساب الاحتمالات قيم x

المختلفة تختلف اختلافاً بيّناً ، فاحتمالات هذه النتائج الثمانية الممكنة ليست متساوية كما كانت الحال في مسألة قطعة النقود . لنحسب هنا الاحتمالات باستخدام قاعدة الضرب للاحتمالات . فحيث أن دحرجات الزهرات الثلاثة مستقلة ، وإن احتمال النجاح (أي الحصول على آس) هو الآن 1/6 ينتج . على سبيل المثال . أن :

$$P\{SFS\} = \frac{1}{6}.\frac{5}{6}.\frac{1}{6} = \left(\frac{1}{6}\right)^2.\left(\frac{5}{6}\right)$$

وبحسابات مماثلة لهذه الخطوات نحصل على احتمالات كل من النتائج الثمان الممكنة ، وقد بيّنا نتائج مثل هذه الحسابات في جدول (6-7) .

جدول (6-7)

النتائج	SSS	SSF	SFS	FSS	SFF	FSF	FFS	FFF
الاحتمال	$\left(\frac{1}{6}\right)^3$	$\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)$	$\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)$	$\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)$	$\left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{5}{6}\right)^2$	$\left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{5}{6}\right)^2$	$\left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{5}{6}\right)^2$	$\left(\frac{5}{6}\right)^3$

وإذن ، نستطيع أن نقارن مجال العينة ذي الثماني نقاط مع احتمالاتها المخصصة إلى مجال العينة للمتغيّر العشوائي x ، وذلك بحساب احتمالات الأحداث المركبة المناظرة للقيم المختلفة للمتغيّر العشوائي . ولقد أجرينا ذلك بمقارنة الجدولين (5-7) , (6-7) . فمثلاً ، يتكوّن حدث x = 2 من الأحداث البسيطة FSS , SFS , SSF وعليه ، فإننا نحصل على احتمال هذا الحدث بجمع الاحتمالات المقترنة بتلك الثلاث . ويبيّن جدول (7-7) مثل هذه الحسابات . كما يعطينا هذا الجدول توزيع المتغيّر العشوائي المطلوب . أما شكله البياني فيعطيه الشكل (7-22) ، وفيه عبّرنا عن احتمالات بصورة عشرية لرقمين عشريين .

جدول (7-7)

x	0	1	2	3
P{x}	$\left(\frac{5}{6}\right)^3$	$3\left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{5}{6}\right)^2$	$3\left(\frac{1}{6}\right)^2.\left(\frac{5}{6}\right)$	$\left(\frac{1}{6}\right)^3$

وفي ضوء هذه النتائج ، يتّضح لنا أنه لا ينبغي للمرء أن يتوقّع الحصول على 3 آسات عند دحرجة ثلاث زهور طاولة . فمثل هذه النتيجة تحدث . على المدى البعيد مرة واحدة تقريباً كل 216 $=6^3$ مرة كما يتّضح لنا أنه لا ينبغي للمرء أن يقبل رهاناً . حتى لو كان مبنياً على المال . أنه سيحصل على الأقل على آس واحد عند دحرجة ثلاثة زهور طاولة ، إذ إن مثل هذه النتيجة تحدث في حوالي 42% ، وعليه فإذا كنت تودّ الفوز على أصدقائك البسطاء ، فراهنهم على أنهم لن يحصلوا على آس واحد على الأقل عند دحرجة ثلاثة زهور طاولة .

ويمكن استخدام الطريقة التي استخدمناها في المثالين التوضيحيين السابقين في أية مسألة خاصة قد تنشأ من مسائل ذي الحدين . فمثلاً إذا كانت هناك 5 إعادات لتجربة النجاح أو الفشل الأساسية ، فسيكون هناك 32 = 2^5 نقطة في مجال العينة . عندئذٍ نحسب الاحتمال المقترن بكل نقطة ، ثم نربط بكل نقطة من نقط مجال العينة القيمة المناسبة للمتغيّر العشوائي x ، ثم بجمع الاحتمالات الخاصة بتلك النقاط التي تناظر قيمة معينة للمتغير x ، نحصل على الاحتمالات للقيم المختلفة للمتغيّر x ، وهذه الاحتمالات تعطي توزيع الاحتمال المطلوب لمتغيّر ذي الحدين للمتغير العشوائي x.

الشكل (7-22) : توزيع عدد من الآسات عند دحرجة زهرة طاولة ثلاث مرات

هذا ، وبسبب صعوبة السير في الحسابات السابقة في كل مرة تنشأ فيها مسألة من مسائل ذي الحدين ، فمن المناسب أن تكون لدينا صيغة يمكن تطبيقها في كل مسألة من تلك المسائل . ولهذا الغرض ، لندرس مسألة عامة من مسائل ذي الحدين ، لنجرِ تجربة يمكننا فيها على الدوام تبويب النتائج إما كنجاح أو كفشل ، لنفرض أن احتمال الحصول على نجاح هو قيمة معلومة ، ولنرمز إليها بالرمز P كذلك ، لنرمز للاحتمال المناظر للفشل بالرمز q . إذن $P + q = 1$ نجري التجربة n من المرات . فإذا رمزنا لعدد مرات النجاح التي سنحصل عليها في الإعادات التي عددها n للتجربة بالحرف x فإن المسألة تكون مسألة حساب الاحتمالات للقيم الممكنة المتنوّعة للمتغيّر العشوائي x . وكما سبق أن قلنا، يمكننا إجراء هذه الحسابات بطريقة منظّمة في أية مسألة معطاة ، لن نعطي هنا سوى نتائج تلك الحسابات وسنستخدم الرمز P{x} ليرمز إلى الاحتمال الخاص بقيمة نموذجية لهذا المتغيّر العام من متغيرات ذي الحدين . هذه الاحتمالات التي تعرف بتوزيع ذي الحدين وتعطى بالصيغة العامة الآتية :

(1)– توزيع ذي الحدين :

$$P\{x\} = \frac{n!}{x!(n-x)!}.P^{x}.q^{n-x} \qquad \textbf{(1)}$$

وكما بيّنا سابقاً نقرأ الرمز !n "مضروب n " . أنه يرمز إلى حاصل ضرب كل الأعداد الصحيحة الموجبة من 1 إلى n ، فمثلاً : 5 . 4 . 3 . 2 . 1 = !5، وكما لاحظنا هناك تعرف القيمة !0 على أنها 1 .هذا ولقيم x , n الكبيرة تصبح الحسابات المتضمّنة في عملية تقييم الكمية !(n-x) !x / !n حسابات صعبة . هذا الجدول يتضمّن قيم n من 2 إلى 20 ، وقيم x من 2 إلى n/2 أو أكبر . فليس من الضروري جدولة كل قيم x التي تزيد عن هذا ، ورأينا أن هذه الفكرة عند معالجة قيم x التي تكبر n/2 ، وبالرغم من أن هذا الجدول يمكّننا من الكتابة السريعة لاحتمالات ذي الحدين ، فإننا لن نستخدمه في المسائل التوضيحيةالآتية ، إذ يبدو أن من المرغوب فيه بالنسبة للطالب أن يألف الصيغة (1) ، وذلك بإجراء الحسابات المطلوبة عندما تكون n صغيرة نوعاً .

ومن المعتاد أن نتحدّث عن التجارب التي عددها n . كمحاولات مستقلة . لتجربة ما ، فيها *P* هو احتمال النجاح في محاولة واحدة . وبناءً على ذلك تكون P{x} هي احتمال الحصول على x من مرات النجاح في n من المحاولات المستقلة لتجربة ما فيها *P* احتمال النجاح في محاولة واحدة .

والتوزيعان التكراريان المبيّنان في شكلي(7-21),(7-22) هما حالتان خاصتان لتوزيع ذي الحدين العام المعطى بالصيغة (1) . ففي مسألة رمي قطعة النقود ، تكون $n= 3$ $P = q = ½$ وفي مسألة دحرجة زهرة الطاولة تكون $n = 3$, $P = 1/6$, and $q = 5/6$ ، وينبغي للقارئ أن يراجع قيم P{x} المعطاة في الشكل (7-21) ، وفي الشكل (7-22) ، وذلك باستخدام الصيغة (1) بهدف أن يألف استخدامها . وكمثال توضيحي لمثل هذه المراجعة ، نفترض أننا نريد حساب قيمة P{3} في مسألة زهرة الطاولة . إن تعويض القيم المناسبة في (1) يعطينا :

$$P\{3\} = \frac{3!}{3!.0!}.\left(\frac{1}{6}\right)^3.\left(\frac{5}{6}\right)^0$$

وحيث أن 0! = 1 ، وأن أي عدد . في الجبر . مرفوع للقوة الصفرية يساوي الوحدة فإن :

$$(\frac{5}{6})^0 = 1 \quad \text{إذن :} \quad P\{3\} = \left(\frac{1}{6}\right)^3$$

هذا ، وبالرغم من أن المسائل التي استخدمناها في تقديم توزيع ذي الحدين كانت مرتبطة بألعاب الحظ ، إلاّ أن توزيع ذي الحدين مفيد للغاية في حلّ أنواع معينة من المسائل العملية ، وهنا ، فسنناقش بضعة مسائل بسيطة لا تتطلّب سوى حسابات سهلة عن طريق الصيغة (1) .

مثال :

احتمال أن يكون لوالدين . أعينهما من نوع معين من العيون الزرقاء . طفل ذو عينين زرقاوين هو ¼ . فإذا كان في الأسرة ستة أطفال ، فما احتمال أن يكون لنصفهم على الأقل عيون زرقاء ؟

لكي نحلّ هذه المسألة نعامل الأطفال الستة في الأسرة كمحاولات مستقلّة . عددها 6 . لتجربة ما ، احتمال النجاح في محاولة واحدة ¼ ، وعلى هذا لدينا هنا $P=$ ¼ $n=$ 6 ومن الضروري حساب P{6} و P{5} , P{4} , P{3} ثم جمعها ، إذ إن هذه الاحتمالات تناظر الطرق التي درسناها .

$$P\{3\} = \frac{6!}{3!.3!}.\left(\frac{1}{4}\right)^3.\left(\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{540}{4096},$$

$$P\{4\} = \frac{6!}{4!.2!}.\left(\frac{1}{4}\right)^4.\left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{135}{4096},$$

$$P\{5\} = \frac{6!}{5!.1!}.\left(\frac{1}{4}\right)^5.\left(\frac{3}{4}\right)^1 = \frac{18}{4096},$$

$$P\{6\} = \frac{6!}{6!.0!}.\left(\frac{1}{4}\right)^6.\left(\frac{3}{4}\right)^0 = \frac{1}{4096}$$

ونحصل على احتمال الحصول على عدد من مرات النجاح يساوي ثلاثة على الأقل بجمع هذه الاحتمالات ، وبالتالي ، يحصل المرء . بكتابة $x \geq 3$ لتمثيل ثلاث مرات نجاح على الأقل . :

$$P\{x \geq 3\} = \frac{694}{4096} = .169.$$

وتبيّن هذه النتيجة أن هناك فرصة ضئيلة جداً أن يكون لأسرة مثل هذه الأسرة عدد كهذا من الأطفال زرق العيون ، ففي حوالي 17 من كل 100 من هذه الأسر ، يكون على الأقل نصف الأطفال ذوي عيون زرقاء .

مثال :

يضمن أحد أصحاب مصانع قطع معينة للسيارات ألاّ يحتوي أي صندوق من صناديق قطعة على أكثر من قطعتين معيبتين ، فإذا كان الصندوق يحتوي على عشرين قطعة ، ودلّت التجربة على أن طريقة التصنيع التي يتّبعها تنتج 2% من القطع المعيبة ، فما احتمال أن يحقق صندوق ما من صناديق قطع المصنع الضمان .

يمكن عد هذه المسألة مسألة من مسائل توزيع ذي الحدين ، فيها n = 20 , P= .02 وسيحقق صندوق ما الضمان إذا كان عدد القطع المعيبة هو 0, 1, or 2 وتعطي احتمالات هذه الأحداث الثلاثة . عن طريق الصيغة (1) . بما يأتي :

$$P\{0\} = \frac{20!}{0!.20!}.(.02)^0.(.98)^{20} = (.98)^{20} = .668,$$
$$P\{1\} = \frac{20!}{1!.19!}.(.02)^1(.98)^{19} = 20.(.02)^2.(.98)^{18} = .273,$$
$$P\{2\} = \frac{20!}{2!.18!}.(.02)^2.(.98)^{18} = 190(.02)^2.(.98)^{18} = .053$$

وحيث أن هذه الأحداث متنافية ، يكون احتمال وجود قطعتين معيبتين على الأكثر أي $x \leq 2$ هو مجموع هذه الاحتمالات ، وإذن فإن الجواب المطلوب هو :

$P\{x \leq 2\} = .994$.

مثال :

كمثال توضيحي أخير ، ندرس المسألة الآتية المتعلّقة باستخدام الحدس في الامتحان ، نفترض أن امتحاناً ما يتكوّن من عدد كبير من الأسئلة من النوع ذي الاختيار المتعدد . لكل سؤال خمس إجابات ممكنة ، واحدة منها فقط هي الإجابة الصحيحة ، فإذا كان الطالب يحصل على 3 نقاط لكل إجابة صحيحة ، في حين يحصل على (1-) نقطة لكل إجابة غير صحيحة ، وإذا كان احتمال حدسه للإجابة الصحيحة في كل سؤال من الأسئلة العشرة هي 1/3 فقط ، فما احتمال حصوله على مجموع كلي موجب عن تلك الأسئلة العشرة ؟

وإذا كانت x ترمز إلى عدد الأسئلة التي أجاب الطالب نفسها إجابة صحيحة فإن مجموعاً كلياً موجباً ينتج إذا كان $3x > 10 - x$ ، فإذا كان الطرف الأيسر لهذه المتباينة يعطي عدد النقاط الموجبة التي يحصل عليها ، في حين يعطي الطرف الأيمن عدد نقاط الخطأ ، وستتحقق هذه المتباينة إذا كانت $x > 10/4$ ، وهذا يعني أنه من الضروري الحصول على ثلاث إجابات صحيحة على الأقل لتحقيق مجموع كلي موجب ، وعلى هذا لتحقيق مجموع كلي موجب ، يعطي الاحتمال الآتي :

$$P\{x \geq 3\} = 1 - \sum_{x=0}^{2} \frac{10!}{x!.(10-x)!}.\left(\frac{1}{3}\right)^{x}.\left(\frac{2}{3}\right)^{10-x}$$

$$= 1 - \left[\left(\frac{2}{3}\right)^{10} + 10\left(\frac{1}{3}\right).\left(\frac{2}{3}\right)^{9} + 45\left(\frac{1}{3}\right)^{2}.\left(\frac{2}{3}\right)^{8}\right]$$

$$= .70.$$

إذن ، لدى الطالب فرصة ممتازة لكسب النقاط إذا كان احتمال حدسه لإجابة صحيحة في كبر القيمة 1/3 ، أما لو كان لا يعرف شيئاً عن موضوع الامتحان ، واختار واحداً من البدائل كيفما اتفق ، لكان بالطبع احتمال اختياره للإجابة الصحيحة عن ل سؤال هو 1/5 فقط ، بيد أننا قد افترضنا هنا أن الطالب ملمّ بموضوعه إلماماً كافياً يجعله يستبعد اثنين من الممكنات الخمسة معتبراً إياها إجابتين بعيدتين عن الصحة بعداً واضحاً ، فيحصر حدسه في الممكنات الثلاثة الباقية، أما لو لم يكن له مثل هذا الإلمام بالموضوع ، وبذا كان احتماله 1/5 ، فإن حسابات شبيهة بتلك الحسابات السابقة ترينا أن ليس هناك من جدوى للحدس .

غالباً ما تصير عملية حساب الاحتمالات ذي الحدين عملية ثقيلة ، حتى باستخدام جدول III ، وذلك عندما يتطلّب الأمر جمع عدد من هذه الاحتمالات ، شريطة ألاّ تكون في متناول أيدينا حاسبات إلكترونية . هذا ، وسنجد أن جدول III في الملحق مفيد في هذه الحالات ، إذا كانت قيمة n لا تتجاوز 10 ، فإن ذلك الجدول يعطي مجموع احتمالات الذيل الأيمن على الصورة :

$$P\{x \geq 10\} = \sum_{x=x0}^{n} \frac{n!}{x!.(n-x)!}.P^{x}.q^{n-x}$$

وحيث أن القيم التي لدينا للاحتمال P تبدأ بالقيمة 05. وتزداد إلى 50. في خطوات قيمة كل منها 05. ، فإنه من الواجب إجراء عمليات توليد القيم P الأخرى التي تقلّ عن 50. ، أما إذا كانت قيمة P تزيد عن 5. ، فإن المرء يستخدم في الجدول $q = 1 - P$ بدلاً من $n - x_o + 1$ بدلاً من x_o ، ثم يطرح الناتج من الوحدة ليحصل $P\{x \geq x_o\}$ ، أما في حالة $n > 10$ فمن P ,

الضروري الرجوع إلى تقريب تلك الاحتمالات ، وسنعرض في بند 4 طريقة من طرق إجراء هذا التقريب .

ولتوضيح استخدام جدول III ، ندرس تطبيقه على آخر مثال من الأمثلة الثلاثة السابقة . إن قيم جدول III التي تحتاج إليها $x_o = 3$, $P = 1/3 = .33$, $n = 10$ وباستخدام التوليد للقيمة $P = .33$. نحصل على $P\{x \geq 3\} = .70$ صحيحاً لرقمين، وهو الجواب نفسه الذي سبق أن حصلنا عليه .

18-7– خواص توزيع ذي الحدين Binomial Distribution Properties:

حيث أن لدينا من الباب الرابع صيغتين عامتين لحساب وسط وتباين متغيّر عشوائي متقطّع فإنه من الممكن استخدام هاتين الصيغتين للحصول على وسط وتباين أي متغير من متغيرات ذي الحدين . فالحسابات التي أنتجت لنا الجدولين (7-2) , (7-3) في الفقرة (ب) هل تلك التي نحتاج إليها للمتغير الخاص من متغيرات ذي الحدين الذي له $P = ½$ and $n = 3$.

ولكي نألف أكثر مثل هذه الحسابات ، دعنا ندرس مسألة حساب الوسط والتباين لمتغير ذي الحدين الذي يعطيه جدول (7-7) والذي يبيّن رسمه البياني في الشكل (7-22) .

هنا : $P = 1/6$, $n = 3$.

والقيم الممكنة للمتغيّر x هي $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$, $x_4 = 3$ ، أما القيم المناظرة للاحتمالات $P\{x_i\}$ فيعطيها جدول 3 ، وحساب قيمة μ التي بنيت على تلك القيم مبينة في جدول (7-8) .

من هذه الحسابات ، ينتج أن : $\mu = \frac{108}{216} = \frac{1}{2}$

جدول (7-8)

X	*P{X}*	*XP{X}*
0	$\frac{125}{216}$	**0**
1	$\frac{75}{216}$	$\frac{75}{216}$

2	$\frac{15}{216}$	$\frac{30}{216}$
3	$\frac{1}{216}$	$\frac{3}{216}$
		$\frac{108}{216}$

أما حسابات σ فيبيّنها جدول (7-9) .

جدول (7-9)

x	$P\{x\}$	$x - \mu$	$(x - \mu)^2$	$(x-\mu)^2 P\{x\}$
0	$\frac{125}{216}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{125}{864}$
1	$\frac{75}{216}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{75}{864}$
2	$\frac{15}{216}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{9}{4}$	$\frac{135}{864}$
3	$\frac{1}{216}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{25}{4}$	$\frac{25}{864}$
				$\frac{360}{864}$

ومن هذه الحسابات ينتج ، أن :

$$\sigma = \sqrt{\frac{360}{864}} = \sqrt{\frac{5}{12}}$$

ومن الممكن أن نستخدم بعض الحيل الجبرية لإجراء حسابات مماثلة للتوزيع العام، الخاص بذي الحدين ، الذي تعطيه الصيغة (1) . إن مثل هذه الحسابات تمدّنا بصيغتين : واحدة للوسط والأخرى للانحراف المعياري ، يمكن استخدامها في كل مسائل ذي الحدين ، وحيث أن مثل هذه الحسابات معقّدة نوعاً ما ، فلن نجرّبها هنا ، بل سنعطي الصيغتين الناتجتين ، وسوف نستخدمها في حل مسائل ذي الحدين ، هاتان الصيغتان وهما في غاية البساطة ، هما :

(2) $\mu = nP$

$$\sigma = \sqrt{nPq}$$

وستتضح ميزة أن يكون لدينا مثل هاتين الصيغتين البسيطتين عندما نطبقهما في المسألة الحسابية التي أتممناها آنفاً ، فللتوزيع الخاص بجدول 3 ، لدينا : $P = 1/6$ ، و $n= 3$ إذن :

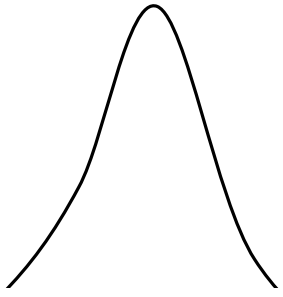
$$\mu = 3.\frac{1}{6} = \frac{1}{2}$$
$$\sigma = \sqrt{3.\frac{1}{6}.\frac{5}{6}} = \sqrt{\frac{5}{12}}$$

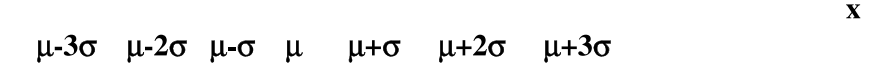
وهذا توفير كبير في الوقت متى قورن بالوقت الذي يحتاج إليه المرء لحساب هاتين الكميتين عن طريق الصيغتين العامتين ، كما في الجدولين (7-8),(7-9) .

19-7– التوزيع الطبيعي أو المعتدل Normal Distribution:

إن توزيع ذي الحدين الذي أوردناه في بند 1 هو أكثر توزيعات الاحتمال فائدة للمتغيرات المتقطّعة ، أما التوزيع الذي سندرسه في هذا البند فهو أكثرها فائدةً للمتغيّرات المتّصلة .

إن المدرّج التكراري في الشكل (7-21) ، الفقرة (ب) ، نموذج لكثير من التوزيعات التي نجدها في الطبيعة وفي الصناعة . فمثل هذه التوزيعات متماثلة ، وتتضاءل بسرعة عند الذيلين ، كما أن لها شكلاً يشابه شكل القوس . وسنرى حالاً أن هناك توزيعاً نظرياً يسمى التوزيع الطبيعي ، قد ثبتت فائدته الكبيرة ، لمثل هذه التوزيعات ، كما أنه مهم للغاية من نواحٍ أخرى والمنحني المرسوم في الشكل (7-21) الفقرة (ب) ، هو رسم بياني لتوزيع طبيعي خاص . أما الرسم البياني لتوزيع طبيعي عام فيعطيه الشكل (7-24) . هذا ، وبالرغم من كون التوزيع الطبيعي يعرف بمعادلة منحني التوزيع ، إلاّ أن هذه المعادلة لن تستخدم ، ولذا فلن نكتبها ، بل سننظر إلى المنحني نفسه كتعريف للتوزيع .





الشكل (**7-24**) : توزيع طبيعي نموذجي

لعلّك قد سمعت عن المنحني الطبيعي فيما يتعلّق بتوزيع التقديرات لمناهج معيّنة في فصول كثيرة ، إن تقدير أداء الطلبة على أساس المنحني الطبيعي يفترض أن توزيع الناتج الذهني للطلبة ينبغي أن يماثل توزيع كثير من الخواص الجسدية لهم ، التي ندرك أنها تتوزّع طبيعياً على وجه التقريب . كذلك . في العادة . يفترض المعلّم الذي يستخدم مثل هذا النظام في وضع تقديراته لأداء الطلبة أنهم . وقد حضروا منهجه . كانت لديهم الخلفيات المناسبة التي يتطلّبها هذا المنهج ، وأنهم قد درسوا العدد المتوقّع من ساعات الدراسة . يا له من معلّم متفائل للغاية ! بيد أن إحدى صعوبات هذا النظام هي أنه يخصص التقديرات على أساس نسبي لا على أساس مطلق . فمثلاً ، إذا كان هناك فصل طلابي موهوب بدرجة غير عادية ، طلبته يشتغلون بجد ، فإنهم سيعطون نفس توزيع التقديرات التي تعطى لفصل من الكسالى الأغبياء . وبالطبع ، يمكننا الردّ على هذا النقد ، إذ إن الطلبة لا يختلفون من عام إلى آخر سوى باختلاف ضئيل جداً ، وعليه ، فليس من المتوقّع أن يتكوّن فصل كبير إما من طلبة مجدّين أذكياء أو من طلبة كسالى أغبياء . هذا ، وإذا كنت قد كرهت المنحني الطبيعي بسبب التقديرات التي ربما قد أعطيتها ، فعليك أن توقن أن المنحني الطبيعي في الواقع ليس هو الملوم ، وأنه ينبغي لك أن تكون كريماً بما فيه الكفاية كي تقترب من دراسته هنا دون تحيّز ، فهو منحن بالغ النفع في مجالات كثيرة من مجالات التطبيق بعيدة تماماً عن مسائل الدراسة .

لعلّنا نذكر من أن وسط توزيع ما يمثّل النقطة الواقعة على محور x التي عندها تتّزن رقيقة معدنية على شكل مدرّج تكراري التوزيع إذا وضعت على مرتكز. هذه الخاصة الهندسية للوسط توضح لنا أنه متى كان مدرّج تكراري ما متماثلاً حول محور رأسي ، فلابدّ أن يقع الوسط عند نقطة التماثل على محور x. وهذا صحيح أيضاً للقيمة النهائية للوسط عندما تجعل حجم العينة يكبر كبراً

بلا حدود ، ونجعل فترة الفئة تصغر بلا حدود . وهذا يفسّر لنا كذلك سبب وضع الرمز μ عند نقطة التماثل على محور x في الشكل (7-24) .

والآن نفترض أن الشكل النهائي للمدرّج التكراري الخاص بتوزيع تكراري ما ، بالمفهوم الذي سبق شرحه ، هو منحن طبيعي . إذن ، يمكننا أن نبيّن بطرق الرياضيات المتقدمة أن σ ، قيمة S النهائية ، لها التفسير الهندسي الآتي بالنسبة للمنحني الطبيعي النهائي :

(أ): المساحة الواقعة تحت المنحني الطبيعي بين $\mu+\sigma$ و $\mu - \sigma$ هي 68% من المساحات الكلية لأقرب 1% .

(ب): المساحة الواقعة تحت المنحني الطبيعي بين $\mu+2\sigma$ و $\mu - 2\sigma$ هي 95% من المساحات الكلية لأقرب 1% .

(ج): المساحة الواقعة تحت المنحني الطبيعي بين $\mu+3\sigma$ و $\mu - 3\sigma$ هي 99.7% من المساحة الكلية لأقرب 1% .

لقد وضعنا علامات على المحور في الشكل (7-24) نقسّمه إلى وحدات من σ ، مبتدئين من الوسط μ ، ويتّضح من هذا الشكل أنه ليس هناك تقريباً أية مساحة تحت المنحني فيما يلي:μ بمقدار 3σ من الوحدات ، بيد أن معادلة المنحني ترينا أن المنحني يمتدّ فعلاً من $-\infty$ to $+\infty$.

هذا ، وقد سبق أن استخدمنا الخاصتين الأولى والثانية من الخواص السابقة لتفسير معنى *S* في الباب الثاني . ولقد وجدنا هناك أن النسبتين المئويتين هاتين صحيحتان على وجه التقريب للمدرجات التكرارية التي لها شكل يشابه المنحني الطبيعي .

الشكل (7-25) : توزيع طبيعي فيه $\mu= 0 , \sigma= 1$

الشكل (7-26) : توزيع طبيعي فيه $\mu= 0 , \sigma= 3$

وثم خاصية مثيرة للاهتمام للمنحني الطبيعي ، ألا وهي أن موقعه وشكله يتحددان كليةً بقيمتي μ , σ الخاصتين به . فقيمة μ تقع طبعاً عند مركز المنحني ، في حين تحدد قيمة σ مدى انتشاره، وحيث أن كل المنحنيات الطبيعية التي تمثّل توزيعات تكرارية نظرية لها مساحة كلية تساوي الوحدة ، فكلّما زادت σ قلّ بالضرورة ارتفاع المنحني وزاد انتشاره . ولقد أوضحنا هذا في الشكل (7-25) و (7-26) حيث رسمنا منحنيين طبيعيين لهما نفس الوسط 0 ، لكن لهما الانحرافين المعياريين 3 و 1 على الترتيب . وحقيقة كون شكل المنحني الطبيعي يتحدد كليةً بانحرافه المعياري تمكن المرء من اختزال المنحنيات الطبيعية جميعها إلى منحن معياري واحد بإجراء تغيير بسيط للمتغير . فمثلاً ، يمكن جعل منحني الشكل (7-25) يشابه منحني الشكل (7-26) بتغيير مقياس الرسم على محور x بحيث تمثّل الوحدة على محور الشكل (7-25) ثلاث وحدات على محور الشكل (7-26) . إن هذا ت على وجه التقريب . يُناظر أخذ منحني الشكل (7-25) ومعالجته هو والمساحة التي تحته كما لو كان مصنوعاً من المطاط ، فنمدّه . مع الاحتفاظ بمساحته . إلى ما يساوي ثلاث مرات طوله الطبيعي . وبالعكس ، يمكن جعل الشكل (7-26) بأخذ الشكل (7-25) بضغط الشكل (7-26) إلى ثلث طوله الطبيعي . وفي هذا نفترض أن الذيلين الطويلين لهذين المنحنيين قد قطعا وقد أهملا . ولما كان أبسط منحن طبيعي يمكننا العمل به هو ذلك المنحني الذي يقع وسطه عند الصفر الذي يكون انحرافه المعياري

الوحدة ، فقد جرت العادة على اختزال المنحنيات الطبيعية إلى هذا المنحني المعياري كلّما احتجنا إلى إجراء الاختزال . والآن ، لكل نقطة على محور x لمنحن طبيعي ما نقطة مناظرة على محور x للمنحني الطبيعي المعياري يمكن تعيين قيمتها بذكر مدى بعدها عن نقطة الوسط للمنحني بدلالة الانحرافات المعيارية فمثلاً ، النقطة x = 6 في الشكل (7-26) تناظر النقطة x= 2 على المنحني الطبيعي المعياري في الشكل (7-25)، إذن يمكننا الحصول على القيمة x = 6 من الشكل (7-25) بأن نذكر أنها تقع إلى يمين الوسط صفر بمقدار انحرافين معياريين .

وبوجه عام ، إذا ناظرت نقطة x على محور منحن طبيعي ما، وسطه μ وانحرافه المعياري σ ، نقطة z على المنحني الطبيعي المعياري ، وقعت x إلى يمين μ بمقدار z من الانحرافات المعيارية . وعلى هذا ، تعطي العلاقة بين هاتين النقطتين المتناظرتين بالصيغة x = $\mu + z\sigma$ أو إذا عبّرنا عن z بدلالة x ، فإن :

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma} \qquad (4)$$

هذه الصيغة تمكن المرء من إيجاد النقطة z على المنحني الطبيعي المعياري التي تناظر أية نقطة x على منحن طبيعي غير معياري . فمثلاً ، النقطة x = 4 في الشكل (7-26) تناظر النقطة :

$$x = (4 - 0) / 3 = 11/3$$

في الشكل (7-25) . وبهذه الطريقة ، التي بها نعبّر عن كل قيم x على منحني طبيعي ما بدلالة القيم المناظرة على المنحني الطبيعي المعياري ، يمكننا اختزال المنحنيات الطبيعية جميعها إلى منحن معياري واحد .

وفي المناقشات السابقة لاحظنا أن الانحراف المعياري s لا يتأثّر بإضافة ثابت إلى قيم فئة من القياسات ، لكنه يضرب في c إذا ضربت كل القياسات في c هذه الخاصية نفسها تظل صحيحة للمتغيّر العشوائي x وانحرافه المعياري النظري σ ، بمعنى أن المتغير c من المرات سيكون له الانحراف المعياري نفسه الذي للمتغيّر x ، لكن انحراف cx المعياري سيكون c من المرات قدر انحراف x المعياري .

وفي ضوء هذه الخواص يكون انحراف σ / $(x - \mu)$ المعياري $1/\sigma$مرة من انحراف $x - \mu$ المعياري أو من انحراف x المعياري، وعليه، إذا كانت σ هي الانحراف المعياري للمتغير x ، فإن الانحراف المعياري للمتغير $z = (x - \mu)/ \sigma$ لابدّ أن يكون الوحدة . وحيث أن وسطه هو μ ، فبطرح μ من x نحصل على متغير $x - \mu$ وسطه صفر . وعلى هذا يكون وسط المتغير $z = (x - \mu)/ \sigma$ هو أيضاً الصفر . إذ إن ضرب متغير ما في ثابت يضرب وسطه في ذلك الثابت ، وضرب الصفر في σ /1 لا يزال يعطينا الصفر ، وعلى هذا سيكون للمتغير $z = (x - \mu)/ \sigma$ الوسط صفر ، والانحراف المعياري الوحدة . وبتغيير المتغير الذي تعطيه الصيغة (4) سيغير أي متغير x إلى متغير آخر وسطه صفر وانحرافه المعياري الوحدة وسيكون هذا صحيحاً سواء أكان المتغير x متغيراً طبيعياً أم لم يكن . ويقال عن متغير ما x قد تغير إلى المتغير z عن طريق الصيغة (4) . إنه مقيس بوحدات معيارية . وذلك بعد إتمام عملية التغيير .

وجدول IX في الملحق هو جدول لإيجاد المساحة الواقعة تحت أي جزء من المنحني الطبيعي للمتغير z أي للمنحني الطبيعي الذي وسطه الصفر وانحرافه المعياري الوحدة. وقيم z في هذا الجدول معطاة لرقمين عشريين ، الرقم العشري الثاني منهما يحدد العمود الواجب استخدامه فمثلاً نفترض أننا نريد حساب المساحة الواقعة تحت المنحني الطبيعي المعياري هذا من $z = 0$ إلى $z = 1000$– وقد بيّنا هذه المساحة المطلوبة ، هندسياً في الشكل (7-27) . نقرأ في جدول IV من أعلى إلى أسفل حتى نصل إلى القيمة 1.0 للمتغير z ، ثم نقرأ بعرض الجدول إلى الكمية المدرجة في العمود المعنون 00 . فنجد القيمة 3413 ، فتكون هي المساحة المطلوبة .

هذا ، ولا يعطينا جدول IV سوى المساحات من $z = 0$ إلى أية قيمة موجبة معينة للمتغير z . أما إذا كنا نريد مساحات واقعة إلى يسار $z = 0$ فلابد لنا من استخدام التماثل والاشتغال على ما يناظر تلك المساحات من النصف الأيمن للمنحني ، فمثلاً التماثل $P\{-1 < z < 1\}$ يعطيها مجموع : $P\{0 < z < 1/2\}$, $P\{0 < z < 2\}$.

والآن ، افرض أننا نريد حساب المساحة الواقعة تحت جزء من منحن طبيعي ما ، وسطه μ وانحرافه المعياري σ . وعلى سبيل المثال نفرض أننا نريد إيجاد المساحة من $x = \mu -$ σ إلى $x = \mu + \sigma$ في الشكل (7-22) . من التماثل ، ينتج أن تلك المساحة هي ضعف المساحة

من $x = \mu$ إلى $x = \mu+\sigma$ ومن الصيغة (4) ، نرى أن القيمتين $x = \mu+\sigma$ و $x = \mu$ تناظران القيمتين $z=1$ و $z= 0$ ، وعليه فإن المساحة من $x = \mu$ إلى $x = \mu+\sigma$ لها القيمة نفسها التي للمساحة الواقعة تحت المنحني الطبيعي المعياري $z= 0$ إلى $z= 1$.

الشكل (7-27) : توزيع طبيعي معياري

وهذه هي نفس قيمة المساحة المناظرة تحت المنحني الطبيعي المعياري المحسوبة في جدول IX والمبينة بالمساحة المظللة في الشكل (7-27) . وحيث أننا قد وجدنا أن هذه المساحة تساوي 3413 . فإن المساحة من $x = \mu+\sigma$ إلى $x = \mu - \sigma$ هي ضعف هذا العدد ، أي 6826 ، وهذا العدد الذي نشأت عنه الخاصية (1) من خواص التوزيع الطبيعي والواردة في (3) .

مثال :

لتوضيح استخدام جدول IX ، ندرس المسألة الآتية : نفرض أن طول الطلبة الجامعيين الذكور هو متغير طبيعي، سنرمز له بالرمز x ، وأن وسطه 69 بوصة وانحرافه المعياري 3 بوصة . ما النسبة المئوية من مثل هؤلاء الطلبة لمن يزيد طولهم عن 72 بوصة ؟ .

هذه النسبة نحصل عليها بحساب الكمية P{x > 72} خذ القيمة x = 72 . إذن ، حيث σ = 3 و μ = 69 فإن قيمة z المناظرة تعطيها :

$$z = \frac{72 - 69}{3} = 1$$

ونجد من جدول IX ، إن المساحة الواقعة تحت المنحني الطبيعي المعياري بين z= 0 و z= 1 هي 3413 ، وحيث أن المساحة الواقعة تحت النصف الأيمن من هذا المنحني هي 5 ، فينتج أن المساحة الواقعة إلى يمين z= 1 تساوي : 1587 =3413 – 5000 وعليه فإن ما يقرب من 16% من الطلبة ستكون قيمة z لهم تزيد عن الوحدة ، وبالتالي يكون طولهم أكبر من 6 قدم 72 بوصة .

مثال :

كمثال توضيحي آخر لاستعمال جدول IX ، نفترض أننا نريد إيجاد المساحة بين x= 280 ، x= 220 للمتغير x الذي له توزيع طبيعي له σ= 20 و μ= 230 ، وقد بيّنا المساحة المطلوبة في الشكل (7-28) .

الشكل (7-28) : توزيع طبيعي خاص

أولاً، من الضروري أن نحسب قيمتي z المناظرتين ، وذلك عن طريق (4) . هاتان القيمتان هما :

$$z_1 = \frac{220 - 230}{20} = -50$$
$$z_2 = \frac{280 - 230}{20} = 2.50$$

قيمتا z هاتان قد بيّنتا في شكل (7-27) بواسطة سهمين رأسيين . والآن المساحة المطلوبة هي المعطاة بالمساحة الواقعة تحت المنحني الطبيعي المعياري من (50.-) إلى 2.50 ونجد من جدول IX أن السماحة من z= 0 إلى z= 2.50 هي 4938 . نتيجة للتماثل ، تكون المساحة من z= -.50 إلى z= 0 هي المساحة نفسها من z= 0 إلى z= .50 ، وهذه المساحة الأخيرة نجدها من جدول IX ، وهي 1915 ، وعلى هذا ، تكون المساحة المطلوبة هي مجموع هاتين المساحتين أي 6853 . هذا ، ولو أن المنحني الطبيعي في شكلي (7-27) و (7-28) كان سيبدو مختلفاً تماماً لو كنا استخدمنا مقياس الرسم نفسه على كل من المحورين ، إلاّ أننا قد رسمناه بحيث يبدو متشابهاً حتى يتّضح تكافؤ المساحات .

20-7– تقريب طبيعي لذي الحدين Normal Aproximation to Binomial:

من السهل حلّ المسائل المتعلقة بتوزيع ذي الحدين ، شريطة ألاّ يكون عدد المحاولات n كبيراً ، أما إذا كان العدد n كبيراً ، فسيصبح الحسابات التي يتضمنها استخدام الصيغة (1) طويلة للغاية ، وبالتالي ، سيكون من المفيد جداً الحصول على تقريب بسيط طيب للتوزيع . ومثل هذا التقريب موجود فعلاً في صورة التوزيع الطبيعي المناسب . وبهدف فحص هذا التقريب ، لندرس بعض الأمثلة العددية .

نفترض أن n = 12 و P= 1/3 كون الشكل البياني لتوزيع ذي الحدين المناظر ، إن قيم P{x} باستخدام الصيغة (1) ، محسوبة لثلاثة أرقام عشرية ، هي :

(5)

P{8}=.015	P{4}=.238	P{0}=.008
P{9}=.003	P{5}=.191	P{1}=.046
P{10}=.000	P{6}=.111	P{2}=.127

P{11}=.000	P{7}=.048	P{3}=.212
P{12}=.000		

هذا وبالرغم من أن الشكل البياني المستخدم سابقاً لتوزيع ذي الحدين كان شكلاً خطياً بسبب طبيعة المتغير x المتقطع ، فإن هذا التوزيع سيرسم كمدرّج تكراري كي تسهل مقارنته بالمدرّجات التكرارية الخاصة بالتوزيع الطبيعي ، ولقد بيّنا المدرّج التكراري الخاص بهذا التوزيع في الشكل (7-29) .

الشكل (7-29) : توزيع ذي الحدين ، فيه P= 1/3 و n= 12

إن ارتفاع أي مستطيل يساوي الاحتمال المعطى في (5) لعلامة الفئة المناظرة ، وحيث أن طول قاعدة أي مستطيل هو الوحدة ، فإن مساحة أي مستطيل تساوي . عددياً . ارتفاعه ، وعلى ذلك فإن هذه الاحتمالات تعطيها كذلك مساحات المستطيلات المناظرة ، ومن شكل هذا المدرج التكراري يبدو أن من الممكن توفيقه بالتقريب مع المنحني الطبيعي المناسب .

وحيث أن أي توزيع طبيعي يتحدد كلية بوسطه وانحرافه المعياري ، فمن الطبيعي هنا استخدام المنحني الطبيعي الذي له الوسط نفسه و الانحراف المعياري نفسه الخاصيان بتوزيع ذي الحدين ومن الصيغتين (2) ، ينتج أن $\mu = 12.\frac{1}{3} = 4 \; and \; \sigma = \sqrt{12.\frac{1}{3}.\frac{2}{3}} = 1.63$ ولقد وضعنا منحنياً طبيعياً بهذا الوسط ، وبهذا الانحراف المعياري فوق ، الشكل (7-29) ليعطي

شكل (7-30) ، ومنه يبدو أن التوفيق مقبول ، بالرغم من كون n= 12 قيمة صغيرة للعدد n ، ولا تعطينا النظريات المتقدّمة بتوفيق طيب سوى للقيم الكبيرة للعدد n .

وكاختبار لدقّة تقري المنحني الطبيعي ، وكتوضيح لكيفية استخدام طرق المنحني الطبيعي لتقريب احتمالات ذي الحدين ، ندرس بضعة مسائل مرتبطة بشكل (7-30) .

الشكل (7-30) : توزيع ذي الحدين ، فيه n= 12 و P= 1/3 مع منحني طبيعي موفق

مثال :

إذا كان احتمال أن يصيب رجلاً هدفاً هو 1/3 ، وأطلق الرجل 12 طلقة ، فما احتمال أن يصيب الهدف على الأقل 6 مرات ؟

إن الجواب المضبوط ، صحيح لثلاثة أرقام عشرية ، يمكن الحصول عليه بجمع القيم الواردة في (5) من x= 6 إلى x=12 ، وهذا المجموع يعطينا الجواب 177.

وهذا الجواب يمثّل هندسياً مساحة ذلك الجزء من المدرّج التكراري المرسوم في الشكل (7-30) الواقع إلى يمين x= 5.5 ، وعلى ذلك فلكي نجد تقريباً لذلك الاحتمال بطرق المنحني الطبيعي ،

ما علينا إلاّ أن نوجد المساحة تحت ذلك الجزء من المنحني الطبيعي الذي وفقناه والواقع إلى يمين x= 5.5 ، وحيث أن المنحني الطبيعي الموفق له σ= 1.63 و μ= 4 ، فينتج أن :

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma} = \frac{5.5 - 4}{1.63} = 0.92$$

والآن ، من جدول IX ، نجد أن المساحة بين z= 0.92 و z= 0 هي 321 . إذن، المساحة الواقعة إلى يمين z= 0.92 هي 179 ، ويكون هذا هو التقريب المطلوب لاحتمال الحصول على الأقل على ست إصابات للهدف . وحيث أن الجواب المضبوط قد سبق أن حسبناه ووجدناه 177 ، فإننا نجد أن تقريب المنحني الطبيعي هنا تقريب جيد بالتأكيد .

مثال :

لاختبار دقة طرق المنحني الطبيعي لفترات قصيرة لنحسب احتمال إصابة الرجل للهدف 6 مرات بالضبط في 12 طلقة .

إن الجواب المحسوب عن طرق (5) صحيح إلى ثلاثة أرقام عشرية هو 111 ، وحيث أن هذا الجواب يساوي مساحة المستطيل الذي تجري قاعدته من 5.5 إلى 6.5 ، فلكي نقرّب هذا الجواب علينا حساب المساحة تحت المنحني الطبيعي الموفق بين x= 6.5 و x= 5.5 وعليه فبحساب قيمتي z وباستخدام جدول IX نجد أن :

$$z_2 = \frac{6.5 - 4}{1.63} = 1.53 \qquad , \quad A_2 = 4370$$

$$z_1 = \frac{5.5 - 4}{1.63} = 0.92 \qquad , \quad A_1 = 3212$$

وبطرح هاتين المساحتين ، نحصل على 116 ، وهو تقريب جيد أيضاً بالمقارنة مع القيمة المضبوطة 111 ، للاحتمال من هذين المثالين يتّضح أن طرق المنحني الطبيعي تعطي تقريبات جيدة حتى في بعض الحالات ، مثل تلك التي درسناها هنا، التي لا تكون فيها n كبيرة جداً .

والآن نفترض أننا لم نغيّر قيمة P= 1/3 ، لكن سمحنا للعدد n بالازدياد، إن المدرّج التكراري الناتج ، مثل ذلك المرسوم في الشكل (7-30) ، سيتحرّك إلى اليمين منتشراً ، وسيقلّ

ارتفاعه . ومن الصعب فحص مثل هذا المدرّج التكراري وملاحظة ما إذا كان من الممكن توفيق منحن طبيعي به . بيد أنه يمكننا تجنّب هذه التغيرات غير المرغوب فيها في المدرّج التكراري وذلك بأن ننتقل إلى المتغيّر المناظر بالوحدات المعيارية ، هذا يعني رسم المدرّج التكراري للمتغير :

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

وذلك من (4) ، وعند استخدام (2) ، يأخذ المتغير المعياري z الصورة :

$$z = \frac{x - nP}{\sqrt{nPq}} \qquad (6)$$

وحيث أن المتغيّر z له توزيع وسطه الصفر وانحرافه المعياري الوحدة ، فإن مسلك مدرّج تكراري z سيكون مسلكاً مرضياً دون ما تجول ، ودون ما تنتشر ، بزيادة n كما كانت الحال بالنسبة لمدرّج تكراري .

ويبيّن الشكلان (7-31) و (7-32) مدرّجاً تكرارياً للمتغيّر z عندما تكون $P=$ 1/3 في الحالتين n= 48 و n= 24 على الترتيب ، ومنهما يتّضح كيف يقترب توزيع z بسرعة من توزيع متغيّر طبيعي ، وسطه الصفر وانحرافه المعياري الوحدة . ويمكننا بطرق متقدمة إثبات أنه إذا احتفظنا بقيمة P ثابتة وسمحنا للعدد n بالازدياد ، فإن توزيع z سيقترب أكثر وأكثر من توزيع متغيّر طبيعي ، وسطه الصفر وانحرافه المعياري الوحدة . هذا ، ومن جهة نظر عملية، قد دلّتنا التجربة ، أن التقريب يكون طيباً متى كان $nP > 5$ في حالة $P \leq 1/2$ ومتى كان $nq > 5$ في حالة $P > 1/2$.

وحقيقة أن يكون للشكل المعياري لمتغيّر ذي الحدين توزيع يقترب من توزيع المتغيّر الطبيعي المعياري، إنما تعني أن المتغير ذي الحدين x مدرّج تكراري من الممكن توفيقه توفيقاً جيداً مع المنحني الطبيعي المناسب عندما تكون n كبيرة ، والمنحني الطبيعي المناسب هو بالطبع ذلك المنحني الذي تعطي الصيغتان (2) وسطه وانحرافه المعياري .

الشكل (7-31) : توزيع ذي الحدين للمتغير

$(x - nP) / \sqrt{nPq}$ **عندما** $P = 1/3 , n = 24$

الشكل (7-32) : توزيع ي الحدين للمتغير

$(x - nP) / \sqrt{nPq}$ **عندما** $P = 1/3 , n = 48$

وهناك حالات عديدة يكون فيها من المناسب أكثر الاشتغال بنسبة مرات النجاح x/n في n من المحاولات ، بدلاً من العمل بالعدد الفعلي x لمرات النجاح، فقسمة البسط والمقام في (6) على n يأخذ z الصورة :

$$z = \frac{\hat{P} - P}{\sqrt{\frac{Pq}{n}}} \qquad (7)$$

حيث رمزنا بالرمز $\hat{P}$ إلى نسبة مرات النجاح x/n . لاحظ أن قيمة z لم تتغير، لكن الذي تغير هو الصورة التي كتبت بها z . وبالتالي فلا يزال للمتغير z ، عندما تكون n كبيرة ، توزيع طبيعي تقريبي ، وسطه الصفر وانحرافه المعياري الوحدة . هذا يعني أنه عندما تكون n كبيرة ، فيكون لنسبة مرات النجاح $\hat{P}$ مدرّج تكراري يمكن توفيقه توفيقاً جيداً بالمنحني الطبيعي المناسب ، أما المنحني الطبيعي المناسب هنا فهو ذلك المنحني الذي يعطي وسطه وانحرافه المعياري بالصيغتين :

$$\mu_{\hat{P}} = P$$
$$\sigma_{\hat{P}} = \sqrt{\frac{Pq}{n}} \qquad (8)$$

مثال :

لتوضيح استخدام تقريب المنحني الطبيعي لتوزيع ذي الحدين في الصيغة (7).

لندرس المسألة التالية ، نفترض أن سياسياً ادّعى أن مسحاً في دائرته قد بيّن أن 60% من مرشحيه يوافقون على تأييده في تشريع مهم . فإذا فرضنا وقتياً أن هذه النسبة المئوية صحيحة ، وإذا أخذت عينة من دائرته تتكون من 400 ناخب ، فما احتمال أن تنتج هذه العينة تأييداً أقل من 50% .

إذا فرضنا أن أخذ عينة من 400 ناخب تشبه ممارسة لعبة من ألعاب الحظ 400 مرة ، يكون احتمال النجاح في كل مرة واحدة منها 6 ، فإن هذه المسألة ممكن أن تعالج كمسألة من مسائل توزيع ذي الحدين فيه n= 400 و P_6 . وباستخدام الصيغة (7) ، تكون :

$$z = \frac{5-6}{\sqrt{\frac{(6).(4)}{400}}} = -4.08$$

والآن ستكون نسبة العينة x=n أقل من 5 ، بشرط أن تكون x أقل من 4.08– وبالتماثل ، يكون احتمال أن تكون z< -4.08 مساوياً لاحتمال أن تكون z> 4.08، هذا الاحتمال يعد صغيراً لدرجة أنه لا يستحق إدراجه في جدول IX . وعلى ذلك إذا حدث أن أيد السياسي أقل من 50% من العينة ، لكان لنا بالتأكيد أن نرفض ادّعاءه بحصوله على 60% من التأييد .

بيد أن هناك اعتراضات . قد تقوم وبحق . تعارض في اعتبار أخذ عيّنة من 400 ناخب مكافئاً لممارسة لعبة من ألعاب الحظ 400 مرة . كما أن هناك أسئلة تتعلّق باستقلال المحاولات وثبوت الاحتمال يجب أن تجيب عنها قبل أن يكون المرء سعيداً سعادةً كاملة بنموذج توزيع ذي الحدين لهذه المسألة .

مثال :

وكمثال ثانٍ لاستخدامه الصيغة (7) ، نحل المسألة التالية ، دلّت التجربة السابقة بامتحان اللغة الإنكليزية للمستجدين في الجامعة أن 50% فقط من الطلبة ينجحون فيه ، فإذا حضر الامتحان فصل جديد مكوّن من 200 مستجدّ ، فما احتمال أن ينجح على الأقل 55% منهم .

$$z = \frac{55-50}{\sqrt{\frac{(5).(5)}{200}}} = 1.41$$

لكن $x \geq 55$ إذا كانت $z \geq 1.41$ وبالعكس، إذن من جدول IX يكون احتمال $x \geq 55$ هو 08.

مثال :

وكمثال أخير ، اعتبر المسألة التالية . افرض أن 5% من الأفراد الذي يطعمون ضدّ الأنفلونزا يعانون ردود فعل لهذا التطعيم غير مستحبة وخطيرة ، باستخدام التقريب الطبيعي ، احسب احتمال أن يعاني مثل ردود فعل هذه أكثر من 8% من أفراد مطعمين عددهم 200 .

إذا طبقنا الصيغة (7) ، فإننا أولاً نحسب :

$$z = \frac{08 - 05}{\sqrt{\frac{(05).(95)}{200}}} = \frac{03}{\sqrt{00\ 02\ 37}} = \frac{03}{0154} = 1.95$$

ثم نجد من جدول IX أن $P\{z>1.95\}=0256$ وهذا هو الاحتمال المطلوب لأن يعاني أكثر من 8% ردود فعل .

هذا ، ولا ينبغي أن نفترض من الأمثلة السابقة أنه من الممكن معالجة مسائل توزيع ذي الحدين جميعها معالجةً مرضية عن طريق التقريب الطبيعي ، حتى لو كانت n كبيرة نوعاً ، فمثلاً إذا كانت $P= 1/20$ و $n = 80$ ، فإن حساب قيم $P\{x\}$ ورسم هذه القيم بيانياً سيبيّنان أن التوزيع غير متماثل بالطريقة التي تكفي للسماح بتوفيق جيد بواسطة المنحني الطبيعي ، ذلك لأن الوسط هنا 4 ، والمتغيّر x لا يمكن أن يأخذ قيماً سالبة ، وبالتالي يتركّز الكثير من التوزيع قرب الصفر للتماثل ، ولقد نشأت من تلك الاعتبارات القاعدة التجريبية للتقريب الجيد ، وقد ذكرناها في الفقرة التي تلي الصيغة (6) .

21-7– استنتاج توزيع ذي الحدين Binomial Distribution Derivation :

سنبيّن فيما يلي صحّة الصيغة (1)، اعتبر تجربة ما من n من المحاولات ، ومتتابعة معينة من النواتج التي تنتج بالضبط عدداً x من مرات النجاح ، وعدداً n-x من مرات الفشل . إن واحدة من مثل تلك المتتابعات هي المتتابعة الآتية ، وفيها وقعت مرات النجاح جميعها أولاً ، ثم تلتها مرات الفشل .

$$\overbrace{SS.....S}^{x}\ \overbrace{FF.....F}^{n-x}$$

وفيما يلي متتابعة أخرى فيها وقعت مرة فشل أولاً تلاها x من مرات النجاح المتتالية ثم تلي ذلك مرات الفشل الباقية :

$$\overbrace{FSS.....S}^{x}\ \overbrace{FF.....F}^{n-x-1}$$

وبسبب استقلال المحاولات يكون احتمال الحصول على أولى هاتين المتتابعتين هو:

$$\overbrace{P.P.....P}^{x}.\overbrace{q.q.....q}^{n-x}=P^x.q^{n-x}$$

واحتمال الحصول على المتتابعة الثانية هو :

$$\overbrace{q.P.P.....P}^{x}.\overbrace{q.q.....q}^{n-x-1}=P^x.q^{n-x}$$

وعلى هذا ، يكون احتمال الحصول على المتتابعة الأولى هو نفسه احتمال الحصول على كل متتابعة تحقق شرط حدوث x من مرات النجاح ، n-x من مرات الفشل .

إن عدد الطرق التي يمكن بها حدوث الحدث المرغوب فيه يساوي عدد المتتابعات المختلفة التي يمكن كتابتها من النوع الذي قد شرحناه ، أي المحتوية على x من حروف S و n-x من حروف F . بيد أن هذا العدد يساوي عدد طرق اختيار x من المواقع من بين n من المواقع التي لدينا لكي نضع فيها الحرف S . أما المواقع الباقية وعددها n-x فستخصص تلقائياً للحرف F . ومن الممكن ترقيم المواقع التي عددها n ومعالجتها كبطاقات مرقمة عددها n ؛ عندئذٍ تكون المسألة مسألة اختيار x من تلك البطاقات . وحيث أن الأرقام المكتوبة على البطاقات هي التي تهمّنا لا ترتيب سحبها ، تصبح المسألة مسألة توافيق . ومن الاستنتاج الوارد في الفقرة (أ) ، ينتج أن عدد طرق اختيار x من البطاقات من بين n من البطاقات المتمايزة تعطيه صيغة التوافيق (13) من الفقرة (أ)، أي :

$$\binom{n}{x}=\frac{n!}{x!.(n-x)!}$$

إذن : هذا هو عدد المتتابعات التي تنتج بالضبط x من مرات النجاح .

وحيث أن كل متتابعة من هذه المتتابعات تمثّل طريقةً من الطرق المتنافية مثنى . التي يمكن أن يقع بها الحدث المرغوب فيه ، وحيث أن كل متتابعة من هذه المتتابعات لها احتمال الحدوث نفسه، وهو $P^x.q^{n-x}$ فينتج أن الاحتمال المطلوب ينتج من جمع هذا الاحتمال عدداً من المرات بعدد المتتابعات التي لدينا ، لكن عدد مثل تلك المتتابعات قد وجدناه $\binom{n}{x}$ ، إذن نحصل على $P\{x\}$ بضرب $P^x.q^{n-x}$ في $\binom{n}{x}$ ، وهذا يحقق الصيغة (1) .

- **أمثلة توضيحية إضافية :**

مثال (1) :

نفترض أن 60% من الطلبة في جامعة كبيرة يعملون لبعض الوقت ، نفترض أن x ترمز لعدد مثل هؤلاء الطلبة في عينة من 8 طلبة اختيروا كيفما اتّفق من ملفات التسجيل .

فبفرض أن حجم الجامعة كبير كبر يسمح بفرض أن تكون $P=6$ ثابتة عندما تؤخذ عينة من ثمانية طلبة فقط .

(أ)– أوجد تعبيراً للاحتمال $P\{x\}$ يعطي توزيع x (بند 1) .

(ب)– استخدم الناتج في (1) لحساب $P\{x \geq 6\}$ (بند 2) .

(ج)– استعمل الصيغتين (2) لحساب وسط x وانحرافها المعياري (بند 3).

(د)– استخدم التقريب الطبيعي لتقريب القيمة التي حصلت عليها في (ب) (بند 4) وهنك الحلول :

(أ): يمكننا معاملة العينة المكونة من 8 طلبة كمحاولات مستقلة لتجربة ما فيها $P=6$ ، وعليه تكون x متغيراً من متغيرات ذي الحدين يعطي توزيعه كما يلي :

$$P\{x\} = \frac{8!}{x!(8-x)!}.(.6)^x(.4)^{8-x}$$

$$(b) \quad P\{x \geq 6\} = P\{6\} + P\{7\} + P\{8\}$$

(ب):

$$= \frac{8!}{6!2!}.(.6)^6(.4)^2 + \frac{8!}{7!1!}(.6)^7(.4)^1 + \frac{8!}{8!0!}(.6)^8.(.4)^0$$
$$= (.6)^6[28(.4)^2 + 8(.6).(.4) + (.6)^2]$$
$$= 315$$

(c) $\mu = 8(6) = 4.8$, $\sigma = \sqrt{8(.6).(.4)} = 1.39$ (ج)

(d) $x = \frac{5.5 - 4.8}{1.39} = .50$, $P\{x > .50\} = .31$ (د)

مثال (2) :

يمكن أن يسع أحد المطاعم 50 عميلاً . وقد دلّت التجربة على أن 10% ممن يحجزون موائدهم لا يأتون ، نفترض أن المطعم قبل 55 حجزاً ، نفترض أن x ترمز إلى عدد العملاء الذين سيأتون .

(أ)– أوجد تعبيراً للتوزيع $P\{x\}$ الخاص بالمتغيّر x (بند 1) ز

(ب)– احسب وسط x وانحرافها المعياري عن طريق الصيغتين (2) (بند 2).

(ج)– استخدام التقريب الطبيعي لحساب احتمال استطاعة المطعم أن يسع جميع العملاء الذين يأتون . (بند 4) .

(أ): يمكن معاملة 55 حجزاً كخمسة وخمسين محاولة مستقلة لتجربة ما فيها $P = 9/10$ ، إذن x متغير من متغيرات ذي الحدين يعطي توزيعه بما يأتي :

$$P\{x\} = \frac{55!}{x!(55-x)!}(.9)^x.(.1)^{55-x}$$

(ب):

$$\mu = 55(.9) = 49.5 \ , \ \sigma = \sqrt{55(.9).(.1)} = 2.2$$

(ج): يمكن أن يجد كل العملاء أماكن لهم إذا حضر على الأكثر 55 منهم ، إذن فالمسألة هي أن تحسب $P\{x \leq 50\}$ ، وهذا الاحتمال يمكن أن نحصل عليه بإيجاد المساحة الواقعة تحت مدرّج تكراري $P\{x\}$ إلى يسار 50.5 ، إن القيمة المناظرة للمتغيّر هي :

$$z = \frac{50.5 - 49.5}{2.2} = .45$$

إذن : $P\{x \leq 50\} = P\{z \leq .45\} = 6.7$

مثال (3) :

نفترض أن x تمثّل الوزن بالرطل لسمكة من نوع السالمون الكبير التي تصطاد عند مصب نهر معين ، ونفترض أن للمتغير x توزيعاً طبيعياً وسطه 30 وانحرافه المعياري 6 .

احسب احتمال أنه . إذا اصطاد سمكة سالمون . فإن وزنها :

(أ)– سيكون على الأقل 41 رطلاً (بند 3) .

(ب)– سيكون بين 40 , 20 رطلاً بما في ذلك 40 , 20 رطلاً (بند 3).

(أ): $z = \frac{41 - 30}{6} = 1.83 \ , \ P\{x \geq 41\} = P\{z \geq 1.83\} = .03$

(ب): $z_1 = \frac{20 - 30}{6} = -1.67 \ , \ z_2 = \frac{40 - 30}{6} = 1.67$

$P\{20 \leq x \leq 40\} = P\{-1.67 \leq z \leq 1.67\} = 2P\{0 \leq z \leq 1.67\} = .90$

مثال (4) :

ضبطت آلة مصممة لثقب الصفائح الحديدية كي تثقب ثقوباً قطرها 1.02 بوصة حتى نضمن بذلك ألاّ يقل الثقب عن 1 بوصة .

(أ)– فإذا كان الانحراف المعياري لقطر الثقوب التي ثقبتها هذه الآلة هو 01. بوصة فما النسبة المئوية للثقوب التي تقل عن 1 بوصة ؟ (بند 3) .

(ب)– إذا كانت الصفائح التي يزيد قطر ثقوبها عن 1.05 بوصة غير صالحة للاستعمال ، فما النسبة المئوية للصفائح التي تحتوي ثقبين والتي سترفض أو تستبعد لأن أحد الثقبين على الأقل أصغر مما ينبغي أو أكبر مما ينبغي ؟ (بند 3) .

(أ): نفترض أن الأقطار لها توزيع طبيعي ، تصبح المسألة مسألة حساب $P\{x < 1.00\}$ حيث x هو هذا المتغيّر الطبيعي ، هنا :

$$z = \frac{1.00 - 1.02}{.01} = -2.00$$

إذن : $P\{x < 1.00\} = P\{x < -2.00\} = .023$

(ب): $$z = \frac{1.05 - 1.02}{.01} = 3.00 \qquad (b)$$

$P\{x > 1.05\} = P\{z > 3.00\} = .001$

وعليه ، فإن احتمال أن يكون ثقب ما غير مرضي هو 024. ، أما احتمال أن يكون الثقبان كلاهما مرضياً فهو 95. = (976.) . (976.) ، إذن ستستبعد 5% من الصفائح .

- **تمرينات :**

1– باستخدام الصيغة (1) حقق القيم التي أعطيناها في جدول 3 من هذا الكتاب .

2– استخدم طريقة حصر النواتج الممكنة مع احتمالاتها المناظرة لاشتقاق توزيع لذي حدين الخاص بعدد الرؤوس التي تحصل عليها عند رمي قطعة نقود 4 مرات. راجع نتائجك باستخدام الصيغة (1).

3– حلّ المسألة 2 بالنسبة لعدد الآسات التي تحصل عليها عند دحرجة زهرة طاولة 4 مرات .

4- رميت قطعة نقود 5 مرات ، استخدم الصيغة (1) لتحصل على قيم {P{x ، حيث x ترمز إلى عدد الرؤوس ، ثم ارسم {P{x بيانياً كخطوط .

5- إذا كان احتمال أن تفوز بيد للبريدج ¼ ، ولعبت 5 أيادٍ ، احسب قيم {P{x حيث x ترمز لعدد مرات الفوز ، وذلك باستخدام الصيغة (1) .

6- إذا كان 20% من المنصهرات معيبة ، واشترينا صندوقاً به 8 منصهرات ، فما احتمال أن تكون على الأقل 6 من تلك المنصهرات صالحة ؟

7- نفترض أن نوعين من الأسبرين A , B لهما الكفاية نفسها في تخفيف الآلام ، إذا جرّب 10 أشخاص نوعي الأسبرين لتخفيف آلامهم ، فما هو احتمال أن يختار 8 منهم على الأقل النوع A .

8- وضع 12 زوجاً من حيوانات التجارب على نظامين مختلفين من أنظمة التغذية وكان تخصيص نظام التغذية لكل زوج عشوائياً . وبعد إتمام إجراء التجربة ، وجد فرق بين زيادة وزن الحيوان الذي اتبع النظام A وزيادة وزن الحيوان الذي اتّبع النظام B ، فإذا كان هذا الفرق موجباً ، سمينا النتيجة نجاحاً فما احتمال أن يقع على الأقل 9 مرات من مرات النجاح إذا لم يكن هناك فرق حقيقي في زيادة الوزن بالنسبة لنظامي التغذية ؟

9- في مسألة 6 ، ما عدد المنصهرات التي تحتاج إلى شرائها حتى يكون احتمال حصولك على الأقل على 6 منصهرات سليمة على الأقل 9 ؟

10- هل تتوقّع أن يكون توزيع ذي الحدين قابلاً للتطبيق عند حساب احتمال أن تزداد سوق الأوراق المالية على الأقل 20 يوماً خلال الشهر القادم إذا كانت لديك سجلاّت عن الأعوام الخمسة الأخيرة للنسبة المئوية التي زادت فيها ؟ اشرح .

11- اشرح لماذا لن يكون صحيحاً تماماً تطبيق توزيع ذي الحدين عند حساب احتمال أن تمطر على الأقل 10 أيام في تشرين الأول إذا عاملنا كل يوم من أيام تشرين الأول كمحاولة حدث وكان لدى المرء سجل للنسبة المئوية للأيام المطيرة في شهر تشرين الأول .

12- لمتغير ذي الحدين الذي له $P=$ ¼ و $n=$ 8 احسب الوسط والانحراف المعياري ، وحقق نتائجك باستخدام الصيغتين (2) .

13- احسب المسألة 5 وسط المتغير x وانحرافه المعياري وحقق نتائجك باستخدام الصيغتين (2) .

14- استنتج الصيغة $\mu = nP$ لتوزيع ذي الحدين العام $P\{x\}$ الذي تعطيه (1) بأن تكتب حدود $\sum_{x=0}^{n} xP\{x\}$ ثم تخرج العامل المشترك nP ، وبعد ذلك نحسب $\sum_{x=0}^{n-1} Q(x)$ حيث $Q(x)$ هي نفس $P\{x\}$ لعدد من المحاولات تساوي الـ n-1 ، وأخيراً تتحقق من أن هذا المجموع الأخير ، الذي قيمته الوحدة ، هو العامل الآخر في $\Sigma xP\{x\}$. إن الصيغة تبدو واضحة لكن استخلاصها جبرياً ليس واضحاً .

15- ارجع إلى أحد المراجع المتقدمة في الإحصاء لمشاهدة الطريقة الجبرية المستخدمة في اشتقاق الصيغة $\sigma = \sqrt{nPq}$.

16- نفترض أن ما حصلت عليه في امتحان ما بالوحدات المعيارية (z) هو 8 . وأننا نفترض توزيع التقديرات توزيعاً طبيعياً، ما النسبة المئوية للطلبة الذين تتوقع أن يحصلوا على درجات أعلى من درجاتك؟

17- أعلن مدرّس ألعاب الرياضة في مدرسة ثانوية أن تقديراته للأحداث الرياضية الفردية تتبع الإنجازات النسبية لجميع فصوله ، فإذا كان يعطي تقدير A لعشرين في المائة وإذا دلّتنا الخبرة على أنه . بالنسبة للقفز العالي . يكون الوسط 10 بوصة والانحراف المعياري 4 بوصة ، ما العلو الذي على الطالب أن يقصد القفز إليه إذا كان يتوقّع الحصول على تقدير A ؟

18- إذا فرضنا أن تقديرات اختبار ذكاء لطلبة إحدى الكليات لها توزيع طبيعي ، وسطه 115 وانحرافه المعياري 8، احسب النسبة المئوية للطلبة الذين سيحصلون في اختبار ذكاء (أ) على أكثر من 130، (ب) على أقل من 100 ، (ج) ما بين 125 و 105 بما في ذلك هاتين الدرجتين.

19- دلّت التجربة بالنسبة لامتحان ما للغة الإنجليزية الأساسية أن توزيع الدرجات يقارب التوزيع الطبيعي الذي له الوسط 130 والانحراف المعياري 20 فإذا كانت درجة النجاح هي 100 فما النسبة المئوية من الطلبة الذين تتوقّع رسوبهم في الامتحان ؟

20- متوسّط عمر موتور كهربي 6 سنوات بانحراف معياري قدره سنتان ، فإذا كان لنا أن نعامل مدى حياة مثل هذا الموتور كمتغيّر طبيعي ، وإذا كان هذا الموتور مضموناً ، فما المدى الواجب أن يطبّق فيه الضمان حتى لا يتعطّل سوى 15% من الموتورات على الأكثر قبل نهاية مدة الضمان ؟

21- رميت قطعة نقود 8 مرات ، أوجد بالضبط ، مستخدماً الصيغة (1) وبالتقريب عن طريق تقريب المنحني الطبيعي ، احتمال الحصول على (أ) 6 مرات على وجه العملة ، (ب) 6 مرات على الأقل على وجه العملة .

22- إذا كان احتمال فوزك في لعبة ما 6 ، أوجد بالضبط ، باستخدام الصيغة (1) وبالتقريب ، عن طريق تقريب المنحني الطبيعي ، احتمال فوزك في 4 لعبات أو أكثر من 7 لعبات تلعبها .

23- إذا كان 30% من الطلبة أبصارهم غير سليمة ، فما احتمال أن يكون أبصار نصف الطلبة على الأقل في فصل من 18 طالباً غير سليم ، استخدم تقريب المنحني الطبيعي .

24- إذا كان 10% من صمامات الصورة في أجهزة التلفزيون تحترق قبل نهاية فترة ضمانها (أ) فما احتمال أن يضطرّ تاجر قد باع 100 من مثل هذه الصمامات أن يعطي على الأقل 14 صماماً منها بدلاً مما احترق ؟ (ب) ما احتمال أن يعطي على الأقل 5 صمامات وعلى الأكثر 14 صماماً ؟ استخدم تقريب المنحني الطبيعي .

25- إذا كان 20% من السائقين في مدينة معينة على الأقل حادث واحد خلال قيادتهم في عام ، ما احتمال أن تتجاوز النسبة المئوية 200 عميل من عملاء إحدى شركات التأمين في تلك المدينة 25% خلال السنة التالية ؟ استخدم تقريب المنحني الطبيعي .

26– إذا كان 20% من الدبابيس المصنّعة معيبة ، فما الاحتمال التقريبي لتجاوز نسبة الدبابيس المعيبة في صندوق به 200 دبوس 15% ؟

27– في أحد امتحانات الاختبارات المتعددة 20 سؤالاً ، مدرّجاً لكل منها أربع إجابات ممكنة ، واحدة منها فقط هي الإجابة الصحيحة ، فإذا استخدم أحد الطلبة حدسه في كل سؤال ، ما احتمال حصوله على الأقل على 8 إجابات صحيحة ؟

28– نفترض $P= 1/10$, $n= 20$ ، احسب $P\{0$ ، وعلى أساس قيمتها دافع عن عدم توقّع توفيق مقبول لمنحني طبيعي للتوزيع بأكمله هنا .

29– احسب لمسألة 31 قيمة $P\{x= 0$ بوساطة تقريب المنحني الطبيعي وقارن نتيجة مسألة 31 .

30– أعطِ مثالاً لتوزيع من توزيعات ذي الحدين يكون فيه $n> 100$ وقيمته P غير صغيرة ، ومع ذلك فلن يكون له تقريب جيد .

31– يحتوي صندوق على أوراق اللعب الآتية وعددها تسع :

(ثلاث) ، (أربع) ، (خمس) إسباتي .

(ثلاث) ، (أربع) بستوني .

(ثلاث) ، (أربع) قلوب .

(أربع) ، (خمس) ديناري .

فإذا كان لنا أن نسحب ورقة لعب من الصندوق ونكرر التجربة 10 مرات، مع إرجاع الورقة المسحوبة في كل مرة ، وإذا كانت X ترمز لعدد الورقات السوداء التي نحصل عليها .

(أ)– أوجد تعبيراً للاحتمال $p\{X$ الذي يعطي توزيع X .

(ب)– استخدم نتيجة (1) لحساب .

(ج) استخدم التقريب الطبيعي لتقريب القيمة التي حصلت عليها في (ب) .

(د) احسب الاحتمال التقريبي ، مستخدماً التقريب الطبيعي كي تكون نسبة الورقات السوداء في مائة محاولة للتجربة ، أقل من 6.

32- لفات لطعام الإفطار كتب عليها أنها تحوي 12 أوقية من الحبوب ، لكن آلة التعبئة عرضة للأخطاء ، بانحراف معياري قدره 1 أوقية .

(أ)- فإذا ضبطت الآلة لتعبئ اللفّة بما يساوي 12.1 أوقية من الحبوب ، ما النسبة المئوية للفات التي يقل وزنها عن المقرر بمقدار 1 أوقية على الأقل ؟

(ب)- إذا رغب المنتج ألاّ يكون هناك أكثر من 5% من لفاته وزنها أقل بمقدار 1 أوقية على الأقل ، فما هو وسط وزن التعبئة الذي ينبغي له استخدامه ؟

33- يمكن إحدى الطائرات أن تتّسع 300 مسافر ، 30 بالدرجة الأولى ، 270 بالدرجة السياحية ، فإذا قبلت شركة الطيران حجزاً لثلاثين من ركاب الدرجة الأولى و 290 من ركاب الدرجة السياحية ، وكان احتمال ألاّ يحضر شخص ممن يقومون بالحجز هو 1 ، فما احتمال أن تسع الطائرة كل المسافرين إذا كان من الممكن استخدام مقاعد الدرجة الأولى لمسافري الدرجة السياحية ؟

الفصل الرابع

الارتباط والانحدار

CORRELTION AND REGRESSION

مقدمة :لاشك أن الطبيعة زاخرة بالظواهر الطبيعية ،المعروفة وغير المعروفة،المألوفة والغريبة،وعلى الباحث في أي مجال كان قبل كل شيء ؛ان يتعرف على العوامل المؤثرة على الظاهرة المدروسة وما هي طريقة وشكل وقوة

التأثير.هذا ما يطلق عليه بشكل عام دراسة العلاقة بين المتغيرات relationship between variables .ان معرفة نوع وشكل وقوة العلاقة وبالتالي التأثير هي أساس النجاح في التعرف على الظاهرة المدروسة .

ولحسن الحظ انه تم تطوير وسائل إحصائية كثيرة بناء على أسس رياضية من أجل دراسة العلاقة بين المتغيرات relationship between variables.ان من أهم هذه التحاليل هي التالية :

1. تحليل الانحدار REGRESSION ANALYSIS
2. تحليل الارتباط CORRELATION ANALYSIS
3. تحليل التباين VARIANCE ANALYSIS

السؤال الآن الذي تطرح نفسه هو أي من التحاليل يتوجب استخدامه من أجل دراسة العلاقة بين المتغيرات،أي العوامل المؤثرة والظاهرة المدروسة ؟

لكن قبل الإجابة على السؤال المطروح علينا أن نقدم بعض الشروحات الضرورية لتوضيح المسألة.

- أنواع المتغيرات variables: يمكن تقسيم المتغيرات إلى نوعين وذلك حسب القيم التي يأخذها المتغير :
  - متغير كمي QUALITIVE:هو المتغير الذي يأخذ قيم كمية أي قابلة للقياس كميا كوحدات القياس مثل وحدات الوزن،الطول ،الحجم ...إلى آخره. وكمثال على ذلك المبيد ،السماد،العمر،كمية الغذاء وهكذا...
  - متغير نوعي QUANTITIVE: هو المتغير الذي يأخذ قيم نوعية غير قابلة للقياس كميا بوحدات القياس المذكورة آنفا بل يقاس بوحدات القياس النوعي كالدرجات والتدرجات والمستويات وهكذا ... إلى آخره.وكمثال على ذلك اللون ودرجة النجاح ودرجة المقاومة ...
- مصادر المتغيرات variables: يمكن تقسيم المتغيرات إلى نوعين وذلك حسب نوع التحكم أو المصدر إلى نوعين :

3. متغير احتمالي RANDOM variables: هو المتغير الذي يأخذ قيم عشوائية محتملة لا يمكن التحكم بها مسبقا مثل المتغيرات الجوية كالحرارة والرطوبة وغيرها .
4. متغير غير احتمالي Controlled variable: المتغير الذي يأخذ قيم محددة يمكن التحكم بها مسبقا مثل المبيد ،السماد،العمر،كمية الغذاء وهكذا...

فيما يلي سنتعرض بالتفصيل لدراسة هذه الوسائل الإحصائية كل على حدة.

1-4 - تحليل الانحدار REGRESSION ANALYSIS :

1-1-4 تعريف : يعرف تحليل الانحدار REGRESSION ANALYSIS بأنه أحد التحاليل الإحصائية الهامة التي تستخدم بشكل عام دراسة العلاقة بين المتغيرات relationship between variables (مثل التحاليل السابقة الذكر كتحليل الارتباط CORRELATION ANALYSIS

وتحليل التباين VARIANCE ANALYSIS) وهو يستخدم في الحالات التالية:

- عندما يكون العامل المؤثر (إي المتغير) من نوع كمي.
- عندما يكون العامل المؤثر من النوع متغير غير احتمالي Controlled variable.
- عندما يكون التأثير من جهة واحدة أي أن العامل المؤثر (المتغير) يؤثر على الصفة المختارة للظاهرة المدروسة والعكس غير صحيح.
- عندما تكون الغاية هي معرفة النموذج الرياضي للعلاقة ما بين العامل المؤثر (إي المتغير) و الصفة المختارة للظاهرة المدروسة.
- عندما تكون الغاية هي التنبؤ الرياضي (أو التوقع الرياضي) لقيم الصفة المختارة للظاهرة المدروسة.

 يجدر التنويه إلى أنه في تحليل الانحدار REGRESSION ANALYSIS يمكن

أن نأخذ بعين الاعتبار ما يلي:

- يطلق على العامل المؤثر (إي المتغير) اسم آخر وهو العامل المستقل(X) بينما يطلق على الصفة المختارة للظاهرة المدروسة اسم العامل التابع (Y) .
- يمكن ان يوجد في التجربة الحيوية أكثر من عامل مؤثر ($X_1,X_{2,...}X_n$) بينما لا يمكن أن يوجد أكثر من صفة مختارة واحدة للظاهرة المدروسة.
- في حال وجود أكثر من عامل مؤثر في التجربة الحيوية فانه لإجراء تحليل الانحدار REGRESSION ANALYSIS لابد من تحقيق الشروط السابقة الذكر على كل عامل سيدخل في تحليل الانحدار REGRESSION ANALYSIS ولكن في هذه الحالة سيتم استخدام تحليل الانحدار المتعدد MULTI-REGRESSION ANALYSIS أما إذا كان هناك عامل مؤثر وحيد في التجربة الحيوية فانه في هذه

الحالة سيتم استخدام تحليل الانحدار البسيط LINEAR-REGRESSION ANALYSIS

4-1-2- **أولا : تحليل الانحدار البسيط LINEAR-REGRESSION ANALYSIS :**

إذا كان لدينا في تجربة حيوية أو زراعية عامل مؤثر واحد (X) وندرس صفة مختارة (Y) فان معادلة الانحدار البسيط هي من الشكل التالي :

$$Y = a + b*X$$

حيث أن : Y القيمة النظرية للصفة المختارة للظاهرة المدروسة

a الثابت للانحدار

b عامل الانحدار

X العامل المؤثر (إي المتغير)

أما كيفية حساب كل من a الثابت للانحدار و b عامل الانحدار فهي على الشكل التالي:

- حساب a الثابت للانحدار : يمكن حساب a ثابت الانحدار باستخدام العلاقة الرياضية التالية:

$$a = \bar{y} - b * \bar{x}$$

- حساب b عامل الانحدار : : يمكن حساب b عامل الانحدار باستخدام العلاقة الرياضية التالية:

$$b = \sum (x - \bar{x}) * (y - \bar{y} / \sum x - \bar{x})^2$$

- كما ويمكن حساب b عامل الانحدار باستخدام العلاقة الرياضية التالية:

$$b = (\sum x * y - \sum x * \sum x / n) / \sum x^2 - (\sum x)^2 / n$$

مثــال ( ) : عند دراسة العلاقة ما بين كمية السماد المضاف كغ/ها وصفة الإنتاج لأحد المحاصيل وجاء كان لدينا التحليل الإحصائي للبيانات الإحصائية DATA كان لدينا ما يلي :

السماد	الإنتاج
X	**Y**
1	**5**
2	**13**
3	**16**
4	**23**
5	**33**
6	**38**
7	**40**

SUMMARY OUTPUT

إحصائية	مؤشرا ت
Regression Statistics	
Multiple R	0.989094
R Square	0.978307
Adjusted R Square	0.973968
Standard Error	2.164651
Observations	7

ANOVA تحليل التباين

	df	*SS*	*MS*	*F*	*Significance F*
Regression	1	1056.571	1056.571	225.4878	2.37E-05
Residual	5	23.42857	4.685714		
Total	6	1080			

تحليل الانحدار

	Coefficients	*Standard Error*	*t Stat*	*P-value*
Intercept a الثابت	0.57143	1.829464	-0.31235	0.767383
عامل الانحدار b	6.142857	0.409081	15.01625	2.37E-05

من الجدول السابق الذي يتضمن نتائج تحليل الانحدار REGRESSION ANALYSIS باستخدام أحد الطرق السابقة الذكر نلاحظ أن :

b عامل الانحدار = 6.1428

الثابت a = 0.57143

وبالتالي تكون معادلة الانحدار البسيط LINEAR-REGRESSION ANALYSIS هي من الشكل التالي :

$$y' = a + b * x$$

وبعد التعويض في المعادلة المذكورة نجد أن :

Y = 6.1428 +0.5714*X

أما تفسير ألأرقام الواردة في معادلة الانحدار المذكورة فهو على الشكل التالي:

- أولا b عامل الانحدار = 6.1428 + بما أن b عامل الانحدار موجب فهذا يعني أن الانحدار ايجابي والعلاقة طر دية وبالتالي إذا زاد قيمة العامل X ازدادت قيمة العامل التابع وهو الإنتاج وإذا نقصت قيمة العامل X وهو السماد نقصت قيمة العامل التابع وهو الإنتاج والعكس صحيح.
- يزداد قيمة العامل التابع وهو الإنتاج بمعدل قيمة b عامل الانحدار = 6.1428 + (طن /ها) عندما تزداد قيمة العامل X وهو السماد وحدة واحدة (1 كغ/ها).
- الثابت a = 0.57143 يعني أن قيمة العامل التابع وهو الإنتاج تساوي الثابت a = 0.57143 (طن /ها) عندما تكون قيمة العامل X وهو السماد مساوية للصفر أي عندما لا يوجد أي إضافة للعامل X وهو السماد.
- أما على سبيل المثال إذا كانت قيمة (b) عامل الانحدار قيمة سلبية فإننا نقول أن الانحدار سلبي والعلاقة عكسية وبالتالي إذا زادت قيمة العامل المستقل X نقصت قيمة العامل التابع وهو الإنتاج وإذا نقصت قيمة العامل X وهو السماد زادت قيمة العامل التابع وهو الإنتاج والعكس صحيح.

3-1-4 جودة معادلة الانحدار REGRESSION MODEL :

ان معادلة الانحدار REGRESSION MODEL المستخدمة عادة هي من الشكل الخطي البسيط ،لكن في معظم الحالات فان هذا الشكل الخطي البسيط قد يكون غير مناسبا لتمثيل البيانات الإحصائية DATA وبالتالي كيف يمكن ان نعرف هل هذا النموذج الرياضي أي معادلة الانحدار البسيط LINEAR-REGRESSION ANALYSIS هل هو مناسب أم لا .

للإجابة على السؤال المذكور يجب التأكد من أن الفرق بين البيانات التجريبية و البيانات الإحصائية DATA المحسوبة من المعادلة معادلة الانحدار REGRESSION MODEL

هو أقل ما يمكن أي بتعبير أخر يجب أن يكون المقدار التالي أقل ما يمكن :

$$\sum (y_i - \hat{y}_i)^2$$

حيث أن : y_i القيم الحقيقية أو التجريبية

y_i القيم المحسوبة من معادلة الانحدار البسيط.

كما أن خطأ التناسب والذي يعط بالعلاقة التالية :

$$ERROR = \sqrt{\sum (y_I - \hat{y})^2 / n - (k+1)}$$

حيث أن : k عدد العوامل المستقلة

n عدد عناصر العينة

y_i القيم الحقيقية أو التجريبية

y_i القيم المحسوبة من معادلة الانحدار البسيط.

من الطبيعي أنه كلما كان المقدار ERROR ،الذي يرمز له عادة S_d، صغيرا كلما كانت جودة معادلة الانحدار REGRESSION MODEL أكبر.هذا يعني علينا دائما البحث عن معادلة الانحدار REGRESSION MODEL الأنسب كما انه يوجد معايير أخرى لجودة معادلة الانحدار ستذكر لاحقا.

4-1-4- الانحدار المتعدد MULTI-REGRESSION ANALYSIS :

إذا كان لدينا في تجربة حيوية أو زراعية أكثر من عامل مؤثر واحد ($X_1,X_2,...X_n$) وندرس صفة مختارة (Y) فان معادلة الانحدار المتعدد هي من الشكل التالي :

$$Y = a + b_1*X_1+b_2*X_2 +....b_n *X_n$$

حيث أن : Y القيمة النظرية للصفة المختارة للظاهرة المدروسة

a الثابت للانحدار

b عامل الانحدار